Samuel de Oliveira Lino

Apostila de Inequações
PET Engenharia Biomédica

Uberlândia

Samuel de Oliveira Lino

Apostila de Inequações
PET Engenharia Biomédica

Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia

Sumário

1 Simbologia

Primeiramente vamos realizar uma revisão a cerca da simbologia utilizada na matemática. Isso e necessário, tendo em vista que essa é a forma com a qual o ambiente acadêmico vai se comunicar. Isto posto, a seguir tem uma tabela com o desenho do símbolo e a definição do mesmo:

Símbolo	Definição
$<$	Menor que
$\leq$	Menor ou igual a
$>$	Maior que
$\geq$	Maior ou igual a
$\approx$	Valor aproximado
$\neq$	Diferente de
$\in$	Pertence ao conjunto
$\notin$	Não pertence
$\subset$	Está contido
$\supset$	Contém
$\cup$	União (OU)
$\cap$	Intersecção (E)
$\forall$	"Qualquer que seja"
: ou $\mid$	"Tal que"
…	"Período"
$\therefore$	"Portanto"
$\exists$	"Existe"
$\nexists$	"Não existe"
$\rightarrow$	"Se…,então…"
$\Leftrightarrow$	"Se, e somente se"
$\Rightarrow$	"Implica que"
[a, b]	Intervalo fechado $\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$
]a, b[ou (a,b)	Intervalo aberto $\{x \in R \mid a < x < b\}$

2 Intervalos

Essa é outra questão que é necessário recordar, a forma com a qual intervalos são representados em uma reta orientada, uma vez que tal representação será muito utilizada na solução de alguns problemas.

- Intervalo fechado: Números reais maiores ou iguais a e menores ou iguais b.
  $[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$

- Intervalo aberto: Números reais maiores do que a e menores do que b.
  $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$

- Intervalo semiaberto à direita: Números reais maiores ou iguais a e menores do que b.
  $[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$

- Intervalo semiaberto à esquerda: Números reais maiores do que a e menores ou iguais b.
  $(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$

- Semirreta esquerda, fechada, de origem b: Números reais menores ou iguais b.
  $(-\infty, b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$

- Semirreta esquerda, aberta, de origem b: Números reais menores que b.
  $(-\infty, b) = \{x \in R \mid x < b\}$

- Semirreta direita, fechada, de origem a: Números reais maiores ou iguais a.
  $[a, +\infty) = \{x \in R \mid x \geq a\}$

- Semirreta direita, aberta, de origem a: Números reais maiores que a.
  $(a, +\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$

3 Inequações

As inequações são a forma da matemática de expressar desigualdades. Ela possui dois lados relacionados ou por uma desigualdade estrita ($< ou >$) ou por uma desigualdade que inclui a igualdade ($\leq ou \geq$). Uma inequação linear em x, por exemplo, pode ser escrita como $ax + b > 0$, onde a e b são números reais com $a \neq 0$.

Para resolve-las, é necessário encontrar todos os valores de x para os quais a inequação é verdadeira, ou seja, os valores de x que satisfazem a desigualdade. O conjunto de todas as soluções de uma inequação é denominado conjunto solução.

Isto posto, as desigualdades apresentam algumas propriedades importantes, que vão facilitar no processo solução da inequação. Elas estão apresentadas a seguir, para tal, considere os números $a, b, c, d \in R$:

- Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.
  Exemplo numérico: $7 > 4$ e $4 > 3$, então $7 > 3$.

- Se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$.
  Exemplo numérico: $7 > 4$ e $5 > 0$, então $35 > 20$.

- Se $a > b$ e $c < 0$, então $ac < bc$.
  Exemplo numérico: $8 > 6$ e $-2 < 0$, então $-16 < -12$.

- Se $a > b$, então $(a + c) > (b + c)$, para todo c real.
  Exemplo numérico: $9 > 8$, $9 + 2 > 8 + 2$.

- Se $a > b$ e $c > d$, então $(a + c) > (b + d)$.
  Exemplo numérico: $3 > 2$ e $5 > 4$, então $8 > 6$.

- Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $ac > bd$.
  Exemplo numérico: $4 > 3 > 0$ e $2 > 1 > 0$, então $8 > 3$.

A propriedade mais importante das inequações é a sua multiplicação ou divisão por um número real. Quando a multiplicação ou a divisão é realizada por um número positivo, é preservada a desigualdade, agora se o número for negativo, inverte-se a desigualdade (o sinal é alterado). Por exemplo:

$$-2x + 7 > 0$$
$$-2x > -7 \quad (* - 1)$$
$$2x < 7$$
$$x < 3,5.$$

3.1.1 Inequações do primeiro grau

Para a resolver essas inequações proceda de maneira semelhante à resolução de equações de primeiro grau normais, atente-se sempre à multiplicação da inequação por um número negativo.

A seguir, estão expostas algumas resoluções de algumas inequações do primeiro grau.

a)

$$3(x–1) + 2 \leq 5x + 6$$
$$3x–5x \leq 6–2 + 3$$
$$–2x \leq 7(*–1)$$
$$x \geq -3.5$$
$$S = \{x \in R | x \geq -3.5\}$$

b)

$$4x–1 + 2(1–3x) \geq 0$$
$$4x–1 + 2–6x \geq 0$$
$$–2x + 1 \geq 0$$
$$–2x \geq -1(*–1)$$
$$2x \leq 1$$
$$x \leq 1/2$$
$$S = \{x \in R | x \leq 1/2\}$$

c)

$$\frac{x-1}{3} + \frac{4(1-x)}{2} > \frac{x}{4} + \frac{2-x}{6}$$

$$\frac{4x-4}{12}+\frac{24-24x}{12}>\frac{3x}{12}+\frac{4-2x}{12}$$
$$–20x+20>x+4$$
$$–21x>-16$$
$$x<16/21$$
$$S=\{x\in R|x<16/21\}$$

3.1.2 Sistema de inequações do primeiro grau

Um sistema de inequações ocorre quando são apresentadas duas ou mais inequações, cada uma com apenas uma variável, sendo essa comum a todas as inequações do sistemas. Para resolver tais sistemas, devem-se seguir os seguintes passos:

1. Resolver individualmente cada inequação;
2. O conjunto solução do sistema é o conjunto resultado da intersecção das soluções das inequações resolvidas individualmente.

Para ilustrar o a resolução segue o exemplo a seguir:

a)

$$2x-1\geq 5$$
$$-x-3<0$$

i)

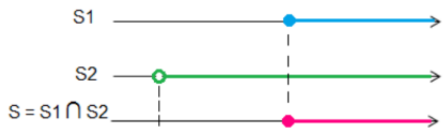
$$2x–1\geq 5$$
$$2x\geq 6$$
$$s1=x\geq 3$$

ii)

$$–x–3<0$$
$$–x<3(*–1)$$
$$s2=x>–3$$

iii)

$$S=\{x\in R|x\geq 3\}\ ou\ S=[3,+\infty)$$



3.1.3 Inequações simultâneas do primeiro grau

Agora vamos tratar de sentenças matemáticas que tem mais do que uma desigualdade. Para esse tipo de caso é necessário separar a inequação de duas desigualdades e encontrar as soluções individuais. Isto posto, siga os passos apresentados anteriormente, o qual resolve um sistema de inequações. A seguir é apresentado um exemplo:

a)

$$-x + 3 < x + 1 < 2x + 2$$

i)

$$-x + 3 < x + 1$$

$$s1 = x > 1$$

ii)

$$x + 1 < 2x + 2$$

$$-x < 1$$

$$s2 = x > -1$$

iii)

$$S = \{x \in R | x > 1\} \; ou \; S = (1, +\infty)$$

3.1.4 Inequação produto e quociente do primeiro grau

As inequações podem ser apresentadas como sentenças de produto ou quociente. Para solve-las, é necessário encontrar os valores de x que satisfazem a condição estabelecida pela inequação, para isso use o estudo do sinal da função. Atente-se, na resolução da inequação com quociente, pois, ao calcular a função do denominados, é essencial adotar valores que sejam diferentes de zero. Exemplo dessas inequações estão apresentados a seguir:

a)

$$(x - 4)(x + 2) > 0$$

i)

$$x–4 = 0$$

$$x = 4$$

ii)

$$x + 2 = 0$$

$$x = –2$$

iii)

$$S = \{x \in R|x < -2\ ou\ x > 4\}$$

b)

$$\frac{x+1}{2x-1} \leq 0$$

i)

$$x + 1 = 0$$

$$x = –1$$

ii)

$$2x–1 = 0$$

$$x = 1/2$$

iii)

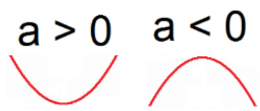
$$S = \{x \in R| - 1 \leq x < 1/2\}$$

3.2 Inequações do segundo grau

Por fim, a inequação do segundo grau ocorre quando tem um termo do segundo grau, por exemplo $ax^2 + bx + c > 0$, na qual a, b, c são constante reais, sendo $a \neq 0$. Para solucionar inequações desse tipo siga os seguintes passos:

1. Igualar a sentença do segundo grau a zero.
2. Encontrar, caso existam, as raízes da equação e localizá-las no eixo x.
3. Estudar o sinal da função correspondente, tomando o comportamento da concavidade da parábola que a representa, isso é ilustrado esse esse comportamento:

Agora, vão ser apresentados alguns exemplos de inequações do segundo grau:



a)

$$x^2–6x + 8 < 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' = 2 \qquad x'' = 4$$

$$S = \{x \in R|2 < x < 4\}$$

b)

$$x^2–6x + 9 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' = x'' = 3$$

$$S = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}|3\}$$

c)

$$–3x^2–2x–1 \geq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = –8$$

$$S = \{\}$$

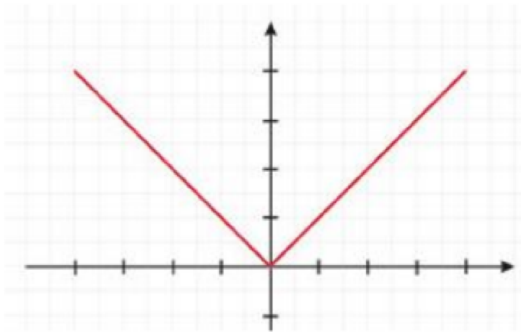
$$(\textit{não há raízes reais})$$

4 Módulo

Trata-se do valor absoluto de um número x, isso indica que, se o número for real positivo ou nulo, ele permanece constante,se ele for real e negativo será o seu simétrico. A forma de expressar a função modular $f(x) = |x|$ está indicada abaixo.

$$|x| = x,\ se\ x \geq 0$$

$$-x,\ se\ x < 0$$

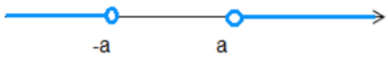


4.1 Inequações modulares

Aplicando o conceito de módulo nas inequações, vai ser indicado a distância associada a representação geométrica do módulo de um número real. De tal forma que:

- Se $|x| < a$, (com $a > 0$), então a distância entre x e a origem é menor do que a, ou seja, x deve estar entre –a e a.
  $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

- Se $|x| > a$ (com $a > 0$), então a distância entre x e a origem é maior do que a, isto é, deve estar à direta de a ou à esquerda de –a.
  $|x| > a \Leftrightarrow x > a \; ou \; x < -a$



Essas afirmações se mantém constantes mesmo que seja trocado os sinais $<$ e $>$ por $\leq$ e $\geq$, respectivamente. Em sequência, estão sendo exibidos alguns exemplos de resolução de inequações modulares:

a)

$$|3x – 2| \geq 5$$

i)

$$3x – 2 \geq 5$$

$$3x \geq 7$$

$$x \geq 7/3$$

ii)

$$3x – 2 \leq –5$$

$$3x \leq –3$$

$$x \leq –1$$

iii)

$$S = \{x \in R | x \leq –1 \; ou \; x \geq 7/3\}$$

b)

$$|–2x + 6| < 2$$

$$–2 < –2x + 6 < 2$$

i)

$$–2 < –2x + 6$$

$$2x < 8$$

$$x < 4$$

ii)

$$-2x + 6 < 2$$

$$-2x < -4$$

$$2x > 4$$

$$x > 2$$

iii)

$$S = \{x \in R | 2 < x < 4\}$$

c)

$$1 < |2x-3| < 4$$

I)

$$|2x-3| > 1$$

i)

$$2x-3 < -1$$

$$2x < 2$$

$$x < 1$$

ii)

$$2x-3 > 1$$

$$2x > 4$$

$$x > 2$$

II)

$$|2x-3| < 4$$

$$-4 < 2x-3 < 4$$

$$-1 < 2x < 7$$

$$-1/2 < x < 7/2$$

III)

$$S = \{x \in R | -1/2 < x < 1 \ ou \ 2 < x < 7/2\}$$

5 Exercícios complementares

a)$x – 3 \geq 2x + 6$

b)$x + 10 > –x + 6$

c)$\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$

d)$-3 < \frac{2x+5}{3} \leq 5$

e) $\frac{x+1}{2x-1} \leq 0$

f) $3x^2 + 10x + 7 < 0$

g) $3x - 2 \geq 7$
$-4x - 8 < 0$

h) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$
$3x - 6 > 0$

i)$|x – 4| < 8$

j)$|2x + 1| < 3$

k)$|4x – 3| > 5$

l)$|x^2 – x – 4| > 2$

m)$|x^2 – 5x| \geq 6$

n)$||2x + 1| – 3| \geq 2$

o)$|\frac{2x-3}{3x-1}| > 2$

p)$|\frac{x+1}{2x-1}| > 2$

Resolução

a)

$$x–3 \geq 2x + 6$$

$$–x \geq 9$$

$$x \leq –9$$

$$S = \{x \in R | x \leq –9\}$$

b)

$$x + 10 > –x + 6$$

$$2x > –4$$

$$x > –2$$

$$S = \{x \in R | x > –2\}$$

c)

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$$

$$4x + 6 > 3x + 4$$

$$x > –2$$

$$S = \{x \in R | x > –2\}$$

d)

$$–3 < \frac{2x + 5}{3} \leq 5$$

$$–9 < 2x + 5 \leq 15$$

$$–14 < 2x \leq 10$$

$$–7 < x \leq 5$$

$$S = \{x \in R | –7 < x \leq 5\}$$

e)

$$\frac{x + 1}{2x - 1} \leq 0$$

i)

$$x + 1 = 0$$

$$x = –1$$

ii)

$$2x–1 = 0$$

$$X = 1/2$$

iii)

$$S = \{x \in R|–1 \leq x < 1/2\}$$

f)

$$3x^2 + 10x + 7 < 0$$

$$\Delta = 16$$

$$x' = –1, x'' = –7/3$$

$$S = \{x \in R|–7/3 \leq x < –1\}$$

g)

$$3x - 2 \geq 7$$

$$-4x - 8 < 0$$

i)

$$3x - 2 \geq 7$$

$$3x \geq 9$$

$$x \geq 3$$

ii)

$$-4x - 8 < 0$$

$$–4x < 8$$

$$x > –2$$

iii)

$$S = \{x \in R|x \geq 3\}$$

h)

$$x^2 - 6x + 9 \geq 03x - 6 > 0$$

i)

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

$$\Delta = 0$$

$$x' = x'' = 3$$

ii)

$$3x–6 > 0$$

$$x > 2$$

iii)

$$S = \{x \in R|x > 2\}$$

i)

$$|x–4| < 8$$

$$–8 < x–4 < 8$$

$$–4 < x < 12$$

$$S = \{x \in R|–4 < x < 12\}$$

j)

$$|2x + 1| < 3$$

$$–3 < 2x + 1 < 3$$

$$–4 < 2x < 2$$

$$–2 < x < 1$$

$$S = \{x \in R|–2 < x < 1\}$$

k)

$$|4x–3| > 5$$

i)

$$4x–3 > 5$$

$$x > 2$$

ii)

$$4x–3 < –5$$

$$x < -1/2$$

iii)

$$S = \{x \in R | x < -1/2 \ ou \ x > 2\}$$

l)

$$|x^2 - x - 4| > 2$$

i)

$$x^2 - x - 4 > 2$$

$$x^2 - x - 6 > 0$$

$$\Delta = 25$$

$$x' = 3, x'' = -2$$

ii)

$$x^2 - x - 4 > -2$$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$\Delta = 9$$

$$x' = 2, x'' = -1$$

iii)

$$S = \{x \in R | x < -2 \ ou \ -1 < x < 2 \ ou \ x > 3\}$$

m)

$$|x^2 - 5x| \geq 6$$

i)

$$x^2 - 5x \geq 6$$

$$x^2 - 5x - 6 \geq 0$$

$$\Delta = 49$$

$$x' = -1, x'' = 6$$

ii)

$$x^2 - 5x \geq -6$$

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$\Delta = 1$$

$$x' = 2, x'' = 3$$

iii)

$$S = \{x \in R | x \leq -1 \ ou \ 2 \leq x \leq 3 \ ou \ x \geq 6\}$$

n)

$$||2x + 1| - 3| \geq 2$$

I)

$$|2x + 1| - 3 \geq 2$$

$$|2x + 1| \geq 5$$

i)

$$2x + 1 \geq 5$$

$$x \geq 2$$

ii)

$$2x + 1 \leq -5$$

$$x \leq -3$$

II)

$$|2x + 1| - 3 \geq -2$$

$$|2x + 1| \leq 1$$

$$-1 \leq 2x + 1 \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 0$$

iii)

$$S = \{x \in R | x \leq -3 \ ou \ -1 \leq x \leq 0 \ ou \ x \geq 2\}$$

o)

$$\left|\frac{2x - 3}{3x - 1}\right| > 2$$

I)

$$\frac{2x - 3}{3x - 1} - 2 > 0$$

$$\frac{2x - 3 - 6x + 2}{3x - 1} > 0$$

$$\frac{-4x - 1}{3x - 1} > 0$$

i)

$$-4x-1=0$$

$$x=-1/4$$

ii)

$$3x-1=0$$

$$x=1/3$$

iii)

$$S1=(-1/4,1/3)$$

II)

$$\frac{2x-3}{3x-1}+2<0$$
$$\frac{2x-3+6x-2}{3x-1}<0$$
$$\frac{8x-5}{3x-1}\quad<0$$

i)

$$8x-5=0$$

$$x=5/8$$

ii)

$$3x-1=0$$

$$x=1/3$$

iii)

$$S2=(1/3,5/8)$$

III)

$$S=\{x\in R|-1/4<x<5/8, x\neq 1/3\}$$

p)

$$|\frac{x+1}{2x-1}|>2$$
$$-2\leq\frac{x+1}{2x-1}\leq 2$$

I)

$$\frac{x+1}{2x-1}\geq -2$$
$$\frac{x+1}{2x-1}+2\geq 0$$

$$\frac{x+1+4x-2}{2x-1}+2 \geq 0$$
$$\frac{5x-1}{2x-1} \geq 0$$

i)

$$5x–1 = 0$$

$$x = 1/5$$

ii)

$$2x–1 = 0$$

$$x = 1/2$$

II)

$$\frac{x+1}{2x-1} \leq 0$$
$$\frac{x+1}{2x-1} - 2 \leq 0$$
$$\frac{x+1-4x+2}{2x-1} \leq 0$$
$$\frac{-3x+3}{2x-1} \leq 0$$

i)

$$–3x + 3 = 0$$

$$x = 1$$

ii)

$$2x–1 = 0$$

$$x = 1/2$$

III)

$$S = \{x \in R | x \leq 1/5 \ ou \ x \geq 1\}$$

Note que o ponto x = 1/2 não pode ser solução de nenhuma das inequações (zera o denominador).