Minicurso de Pré-Cálculo
Apostila de apoio

Aula 4 - Trigonometria

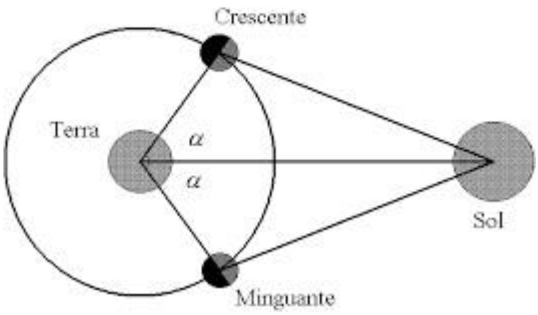
PET – Programa de Educação Tutorial
Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia, 05 de junho de 2024

Sumário

1. Introdução

A Trigonometria é responsável por estabelecer relações entre os lados e os ângulos de um triângulo, ela se fundamenta principalmente em triângulos retângulos, já os que não possuem ângulo reto são adaptados para serem solucionados.

Esse campo surgiu com a necessidade de calcular distâncias inacessíveis, dessa forma o crescimento dessa área da matemática colaborou para determinar a relação entre as distâncias dos astros. Na Figura 1, com a posição da lua e o período que ela muda de minguante para crescente é possível estabelecer as distâncias entre a Terra e o Sol e a entre a Terra e a Lua.



.

Figura 1. Representação simplificada com o Sol e a Terra fixos.

Além disso, através da trigonometria é possível interpretar um eletrocardiograma, exame que avalia a atividade elétrica de um coração, pois sua onda complexa pode ser decomposta em ondas mais simples como ilustrados, respectivamente, pelas Figuras 2 e
3.

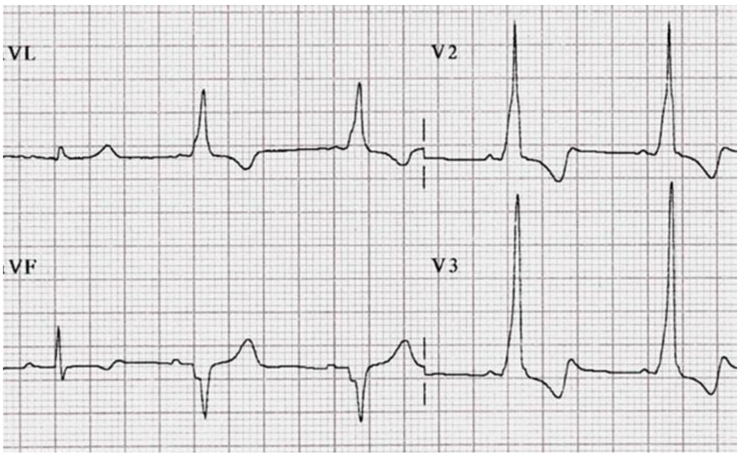


Figura 2. Ondas de um eletrocardiograma.

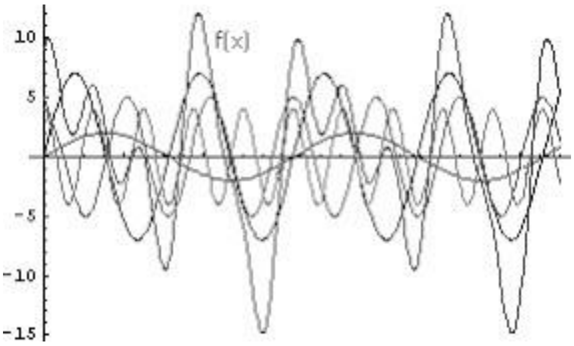
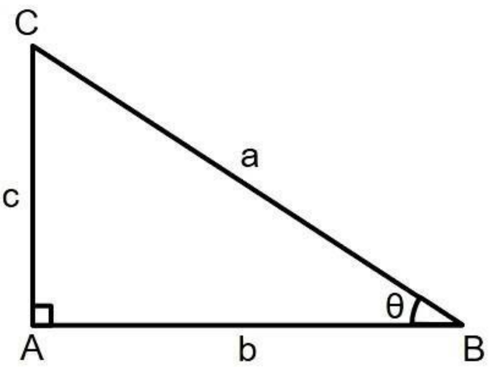


Figura 3. Onda de um eletrocardiograma decomposta em diversas ondas.

Isto posto, será apresentado a seguir os fundamentos da trigonometria, de tal forma que esses conhecimentos possam ser usados para estudos mais avançados com o decorrer da graduação.

2. Triângulo trigonométrico

Considerando um triângulo retângulo AḂC, Figura 4, com ângulo agudo θ no ponto B, com seu cateto oposto medindo c, cateto adjacente medindo b e a hipotenusa a. Teremos as seguintes relações trigonométricas:



$$sen\theta = c/a$$

$$cos\theta = b/a$$

$$tg\theta = c/b$$

$$cotg\theta = b/c$$

$$cossec\theta = a/c$$

$$sec\theta = a/b$$

Figura 4. Triângulo retângulo AḂC.

Assim pelo Teorema de Pitágoras, obtemos a **Equação Fundamental da Trigonometria:** $(Hipotenusa)^2$ = $(Cateto\ oposto)^2$ + $(Cateto\ adjacente)^2$

$$a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = (a.\,sen\theta)^2 + (a.\,cos\theta)^2$$

$$a^2 = a^2sen^2\theta + a^2cos^2\theta$$

$$a^2 = a^2(sen^2\theta + cos^2\theta)$$

$$\boldsymbol{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$$

Para encontrar outras equações, basta manipular a Equação Fundamental da trigonometria com funções de seno e cosseno como a seguir:

- Dividindo por $sen^2\theta$:

$$(1/sen^2\theta).\ (sen^2\theta + cos^2\theta) = 1/sen^2\theta \Rightarrow 1 + cotg^2\theta = cossec^2\theta$$

- Dividindo por $cos^2\theta$

$$(1/cos^2\theta).\ (sen^2\theta + cos^2\theta) = 1/cos^2\theta \Rightarrow tg^2\theta + 1 = sec^2\theta$$

Exercício 1:

(Cefet – PR)

A rua Tenório Quadros e a avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, cruzam-se conforme um ângulo de 30º. O posto de gasolina Estrela do Sul encontra-se na avenida Teófilo Silva a 4 000 m do citado cruzamento. Sabendo que o percurso do posto Estrela do Sul até a rua tenório quadros forma um ângulo de 90° no ponto de encontro do posto com a rua Teófilo Silva, determine em quilômetros, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a rua Tenório Quadros?

Exercício 2:

Calcule o valor da expressão abaixo, sabendo que senx = 3/5.

$$z = \frac{secx - cosx}{tgx + cotgx}$$

3. Círculo trigonométrico ou ciclo trigonométrico

O ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio igual a 1 e centro na origem de um plano cartesiano, conforme a Figura 4. Assim, a orientação dela no sentido anti-horário corresponde a ângulos positivos, enquanto se percorrida no sentido horário os ângulos serão negativos.

Além disso, esse círculo possui quatro quadrantes determinados pelos eixos cartesianos. No 1° quadrante estão presentes os arcos de 0 até $\pi/2$ rad ou 0 a 90°; no 2° quadrante de $\pi/2$ até π ou 90° a 180°; no 3° quadrante de π até $3\pi/2$ ou 180° a 270° por fim no 4° quadrante os arcos vão de $3\pi/2$ até 2π ou de 270° até 360°.

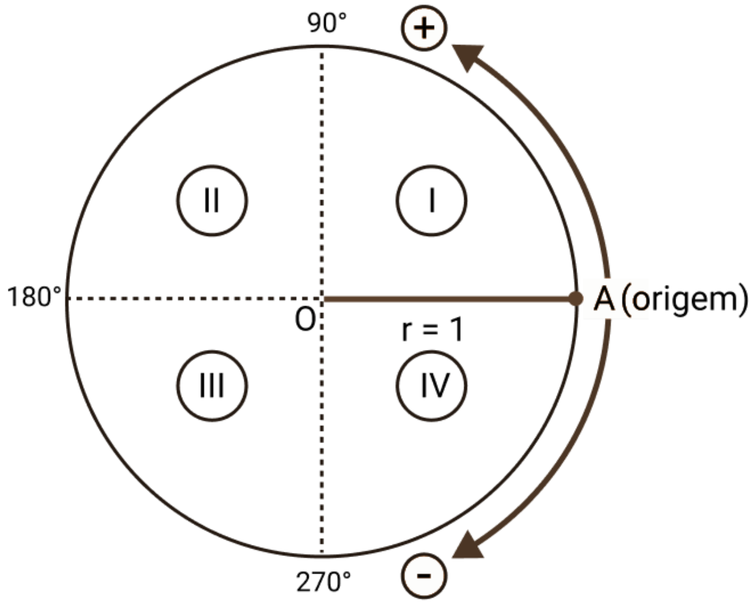


Figura 4. Sentidos e quadrantes do círculo trigonométrico.

4. Seno, cosseno e tangente no ciclo

Os eixos das abscissas e das ordenadas se encontram na origem da circunferência trigonométrica, eles correspondem, respectivamente, aos eixos dos cossenos e dos senos, conforme a Figura 5, dessa maneira o ponto P com coordenadas (x;y) poderá ser escrito como (cosα; senα). Além disso, no ponto (1;0) paralelo ao eixo dos senos é traçado o eixo das tangentes. Portanto, define-se, na Figura 6, os sinais dos senos, cossenos e tangentes para cada quadrante.

PET Engenharia Biomédica

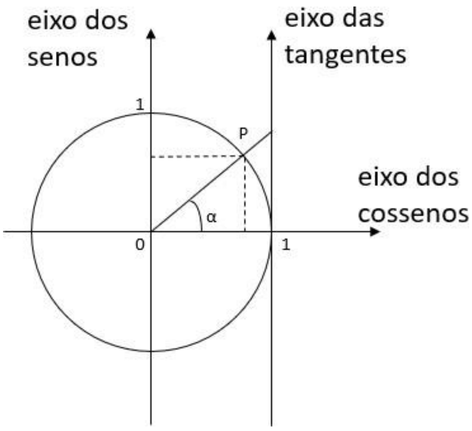


Figura 5. Eixos dos cossenos, senos e tangentes no ciclo trigonométrico.

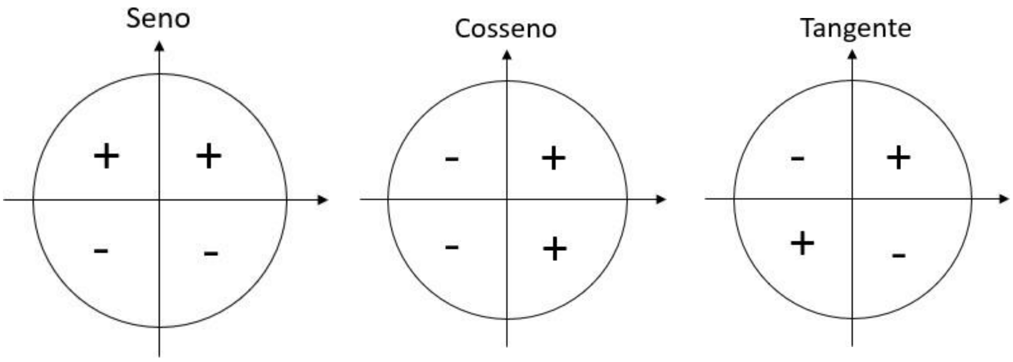


Figura 6. Sinais dos senos, cossenos e tangentes

.

5. Transformações de radianos para graus e vice-versa

Um ângulo pode ser medido em pelo menos duas unidades, uma delas é o grau, representada pelo símbolo “ ° ” e a outra é o radiano, sendo simplificada apenas por rad. A primeira compreende que o círculo vai de 0° até 360° enquanto a segunda define a circunferência de 0 até 2π. Logo, a conversão da medida 5 rad para “x” graus pode ser dada pela seguinte regra de 3. **Resolução**

RADIANOS		GRAUS
5	———	x
2π	———	360°

$$5.360° = 2\pi x \Rightarrow x = 5.360°/2\pi \Rightarrow x = 286{,}48°$$

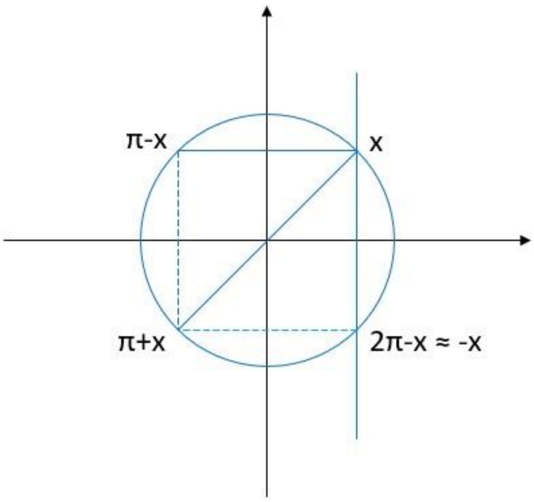
A mesma lógica vale para quando for necessário mudar de graus para radianos.

6. Ângulos notáveis

É interessante memorizar a seguinte tabela para agilizar cálculos, pois esses ângulos notáveis aparecem frequentemente.

	0	π/6	π/4	π/3	π/2
	0°	30°	45°	60°	90°
sen(x)	0	1/2	√2/2	√3/2	1
cos(x)	1	√3/2	√2/2	1/2	0
tan(x)	0	√3/3	1	√3	∞

7. Relações de simetria no círculo



Podemos tirar algumas observações a partir da figura acima:

- $sen(\pi - x) = sen\, x$
- $cos(\pi - x) = -cos\, x$

- $sen(\pi + x) = -sen\, x$

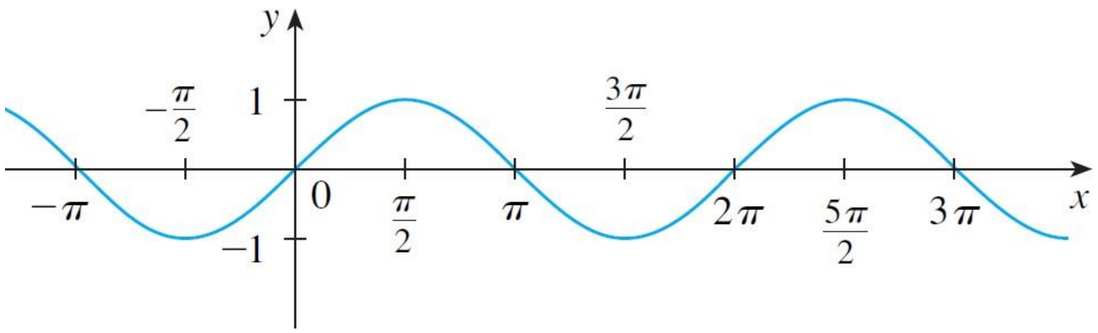
PET Engenharia Biomédica

- $cos(\pi + x) = -cos\ x$
- $sen(2\pi - x) = sen\ (-x) = -sen\ x$
- $cos(2\pi - x) = cos\ (-x) = cos\ x$

8. Funções trigonométricas

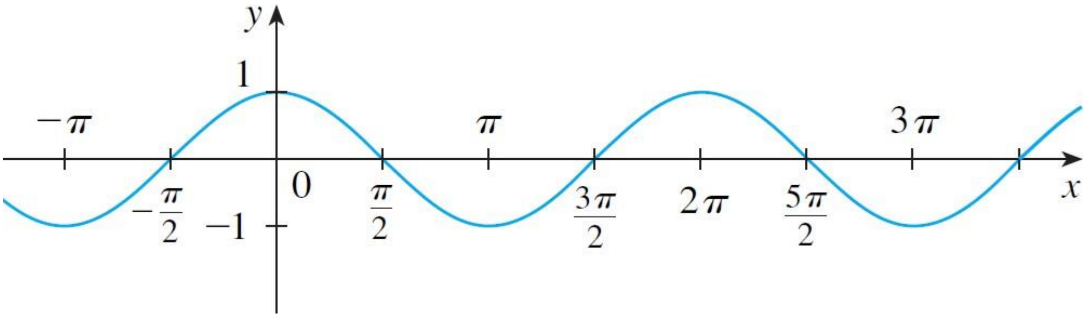
8.1. Função Seno

A função seno é definida como uma correspondência entre cada número real x e o seno de x, expressa como f(x) = sen x. O domínio dessa função é em *R*. Os valores resultantes do seno de x estão limitados entre -1 e 1, o que significa que o intervalo de imagem da função seno é [-1, 1]. Além disso, os valores do seno se repetem periodicamente a cada 2π, o que torna o período da função seno igual a 2π. A curva formada pelo gráfico da função seno é conhecida como senóide.



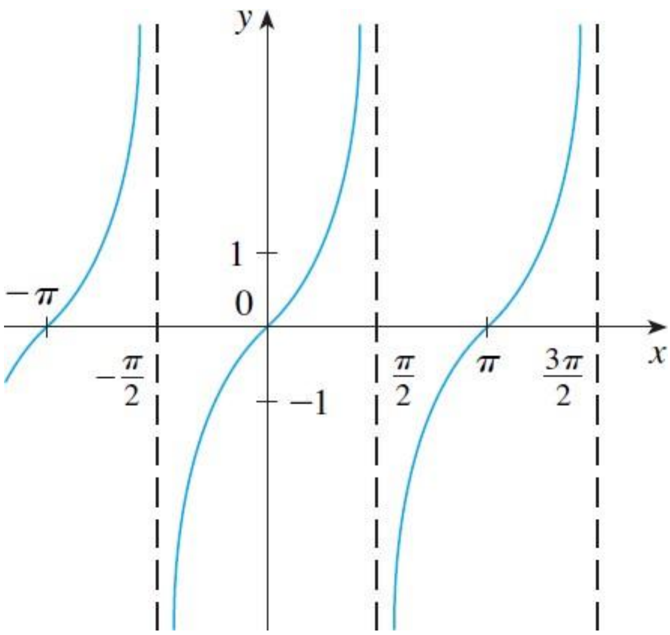
8.2. Função Cosseno

A função cosseno é definida como uma correspondência entre um número real x e o cosseno de x, expressa como f(x) = cos x. Seu domínio é o conjunto universal dos números reais, e seu intervalo de imagem é [-1,1]. Assim como a função seno, a função cosseno tem um período de 2π A curva resultante do gráfico da função cosseno é conhecida como cossenóide.

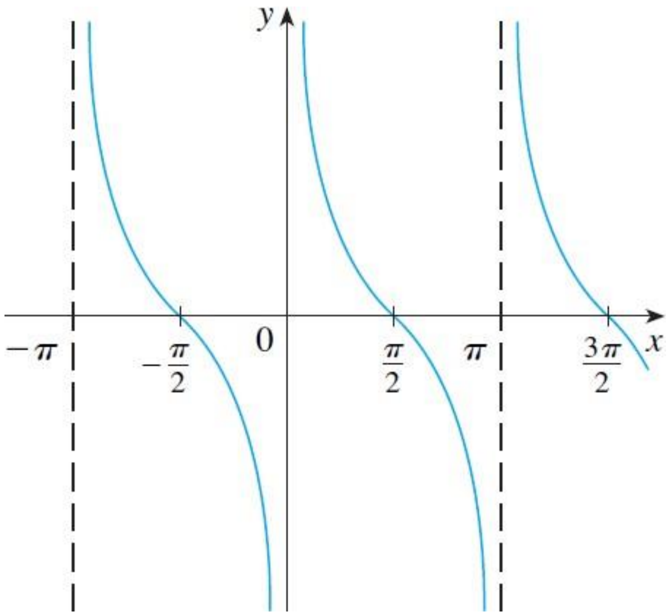


8.3. Função Tangente

A função tangente é uma correspondência entre um número real e tangente de x, expressa como f(x) = tg x. É importante lembrar que a função tangente não é definida para ângulos cujo arco é congruente a $\pi/2$ e $3\pi/2$, e portanto, esses ângulos devem ser excluídos do domínio da função. Na função tangente, os valores se repetem a cada π rad, o que faz com que o período da função tangente seja igual a π.

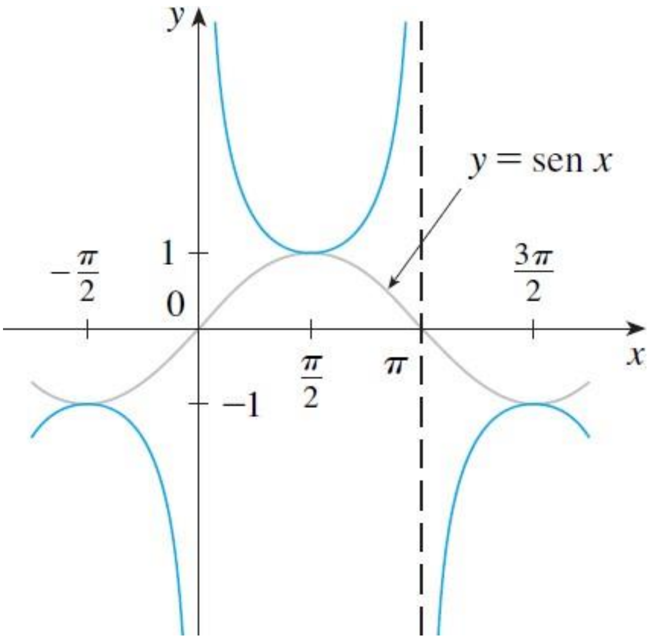


8.4. Função Cotangente



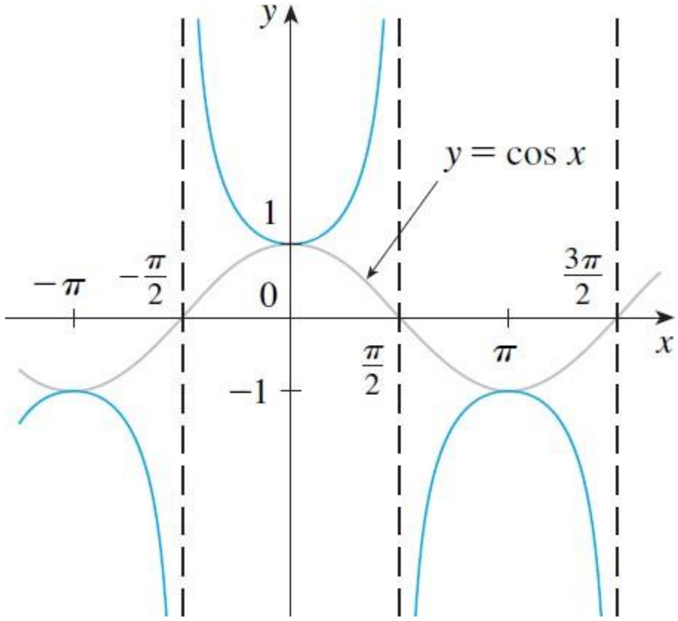
8.5. Função Cossecante

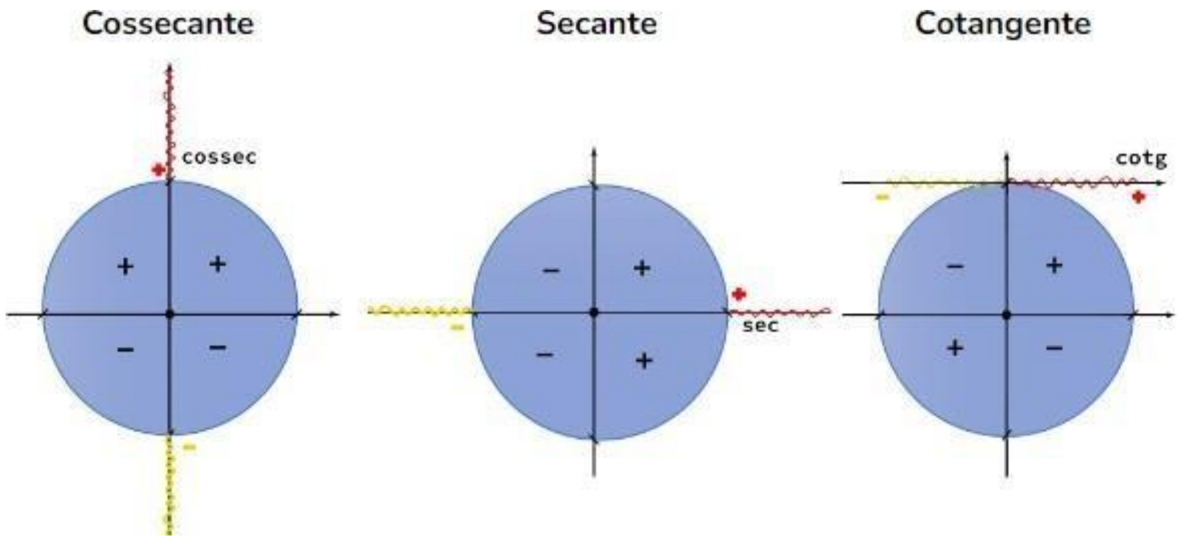
A função gráfica da cossecante, expressa matematicamente por csc(x)=1/sen(x), será uma curva com uma assíntota para cada valor de x que é múltiplo de π, já que o seno é igual a zero nesses pontos e a cossecante será infinita. A curva da cossecante será simétrica em relação a essas assíntotas e terá picos positivos e negativos alternados à medida que se afasta dos valores de x que são múltiplos de π.



8.6. Função Secante

A função gráfica da secante, representada matematicamente por sec(x) =1/cos(x) será uma curva com uma assíntota para cada valor de x que é múltiplo de π/2, já que o cosseno é igual a zero nesses pontos e a secante será infinita. A curva da secante será simétrica em relação a essas assíntotas e terá picos positivos e negativos alternados à medida que se afasta dos valores de x que são múltiplos de $\pi/2$.





9. Fórmulas de trigonometria

Considerando a seguinte relação entre cos(60°+30°) e cos 60° + cos 30°:

$$\cos(60°+30°) = \cos 90° = 0$$
$$\cos 60° + \cos 30° = 1/2 + \sqrt{3}/2 = (\sqrt{3}+1)/2$$

Vimos que, $cos(60° + 30°) \neq cos\ 60° + cos\ 30°$

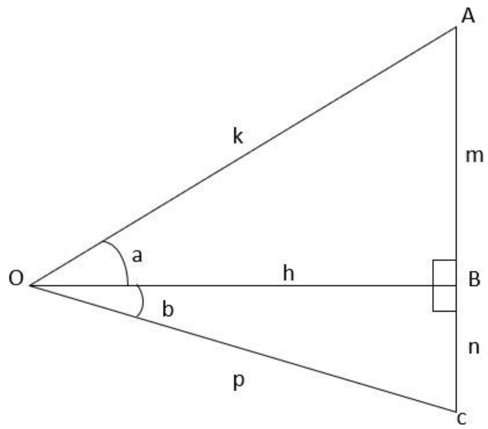
A mesma comparação serve para as seguintes situações:

- $sen(a + b) \neq sena + senb$
- $sen(a - b) \neq sena - senb$
- $cos(a + b) \neq cosa + cosb$
- $cos(a - b) \neq cosa - cosb$

Por consequência, as funções derivadas de seno ou cosseno possuem a mesma característica, como tg(a$\pm$b), cotg(a$\pm$b), sec(a$\pm$b) e cossec(a$\pm$b).

9.1. Fórmulas de adição e subtração

A partir das áreas do triângulo AOC dividido em AOB e BOC, temos:



A_{ABO}=(k.h.sen a)/2
A_{BOC}=(p.h.sen b)/2
A_{AOC}=(k.p.sen (a+b))/2

Logo se:
cos a =h/k ⇒ h=k.cos a
cos b=h/p ⇒ h=p.cos b

Portanto, temos:

A_{AOC}=A_{ABO}+A_{BOC} ⇒ [k.p.sen (a+b)]/2 = (k.h.sen a)/2 + (p.h.sen b)/2 ⇒
[k.p.sen (a+b)]/2 = (k.p.cos b.sen a)/2 + (p.k.cos a.sen b)/2 ⇒ ⇒
<u>sen(a+b) = sen a.cos b + sen b.cos a</u>

Nessa fórmula “a” e “b”, são valores reais.

- Dada as definições a seguir, encontraremos sen(a-b):
  a-b = a+(-b) sen(-
b)=-sen b cos(-b)=cos b

sen(a-b)=sen[a+(-b)] = sen a.cos(-b)+sen (-b).cos a⇒
⇒ sen(a-b)=sen a.cos b - sen b.cos a

- Visto que cos x = sen(π/2 -x), então:

cos(a+b) = sen [π/2 - (a+b)] = sen[(π/2-a)-b] = sen (π/2-a).cos b- cos(π/2-a).sen b⇒

Dessa forma, se sen(π/2-a)=cos a e cos(π/2-a)=sen a, te=cos a. cos(-b) -sen a. sen(-
b) ⇒ cos (a-b) = cos a. cos b + sen a. sen bmos: cos (a+b)=cos a.
cos b - sen a. sen b

- Sabendo que: a-b = a+(-b) sen(-b)=-sen b cos(-
  b)=cos b

Como, cos(a-b)=cos[a+(-b)] cos(a-b)= cos a. cos b + sen a.
sen b

- Para a,b e $a + b \neq \pi/2 + k\pi$ tg (a + b) = tg a
  + tg b
  1 – tg a · tg b
- Para a,b e $a - b \neq \pi/2 + k\pi$ tg (a – b) =tg a – tg b
  1 + tg a · tg b

9.2. Fórmulas do arco duplo

As equações a seguir são um caso particular das fórmulas de adição e subtração vistas anteriormente, se tratam de arcos com medidas 2a, basta fazer a=b e substituir nas fórmulas, assim:

- sen (a + a)= sen 2a = sen a. cos a + cos a. sen a ⇒ $sen\ 2a = 2sen\ a. cos\ a$
- cos (a + a)= cos 2a = cos a. cos a- sen a. sen a ⇒ $cos\ 2a = cos^2 a - sen^2 a$
- tg 2a = tg (a + a) = tg a + tg a = 2.tg a 1 – tg a · tg a 1-$tg^2 a$

9.3. Fórmulas do arco metade

As equações relacionam funções trigonométricas de um arco a/2 com outra função trigonométrica. Para demonstrar, sabemos que $cos\ 2x = 2.cos^2x - 1$, assim:

$$cos\ 2x = 2.cos^2x - 1 \Rightarrow 2.cos^2x = 1 + cos\ 2x \Rightarrow cos^2x = (1 + cos\ 2x)/2$$

Dessa forma , se 2x = a, então x=a/2, portanto:

$$cos^2(a/2) = (1 + cos\ a)/2$$

Para o arco metade para seno, $cos\ 2x = 1 - 2.sen^2x$, e 2x=a ⇒x=a/2, temos:

$$cos\ 2x = 1 - 2.sen^2x \Rightarrow 2.sen^2x = 1 - cos\ 2x \Rightarrow sen^2x = (1 - cos\ 2x)/2 \Rightarrow sen^2(a/2) = (1 - cos\ a)/2$$

9.4. Fórmulas de transformação de produto

Visto que:

- $sen(a + b) = sen\ a.cos\ b + sen\ b.cos\ a\ (I)$
- $sen(a - b) = sena.cos\ b - sen\ b.cos\ a\ (II)$ De (I) +(II) e (I)-(II), então:
- $sen(a + b) + sen(a - b) = 2.sen\ a.cos\ b$
- $sen(a + b) - sen(a - b) = 2.sen\ b.cos\ a$

Para x=a+b e y=a-b, logo: a=(x+y)/2 e b=(x-y)/2

sen x + sen y = 2.sen((x+y)/2).cos((x-y)/2)

sen x - sen y = 2.sen((x-y)/2).cos((x+y)/2)

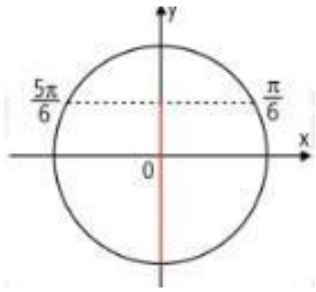
10. Equações trigonométricas

Nessas equações a incógnita aparece como medida do arco de alguma função trigonométrica. Não há uma única forma que resolva todas essas equações, mas é possível manipulá-las para equações básicas do tipo sen x = a, cos x ou tg x=a.

1. Resolva as seguintes equações:

a) sen x = ½

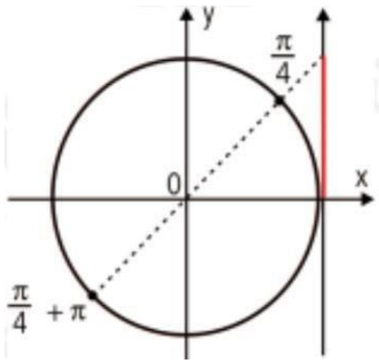
Solução:



Sabemos que na primeira volta do círculo trigonométrico os arcos com seno igual a ½ são $\pi/6$ e $5\pi/6$, logo em todas as voltas temos:
$x=\pi/6 + 2k\pi$ ou $x=5\pi/6 + 2k\pi$.

$$S = \{x \in R \mid x = \pi/6 + 2k\pi \; ou \; x = 5\pi/6 + 2k\pi\}$$

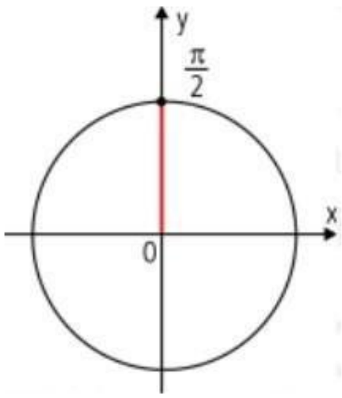
b) tg x = 1
Solução:



Os arcos com tangente igual a 1 no 1° ciclo são $\pi/4$ e $5\pi/4$. Dessa forma, todas as respostas podem ser dadas por $x=\pi/4 + k\pi$.

$$S = \{x \in R \mid x = x = \pi/4 + k\pi\}$$

a) sen 2x = 1



Temos que sen$\pi/2$=1:

$$2x=\pi/2+2k\pi \Rightarrow x=(\pi/2+2k\pi)/2 = \pi/4+k\pi$$

$$S = \{x \in R \mid x = \pi/4 + k\pi\}$$

PET
Engenharia Biomédica

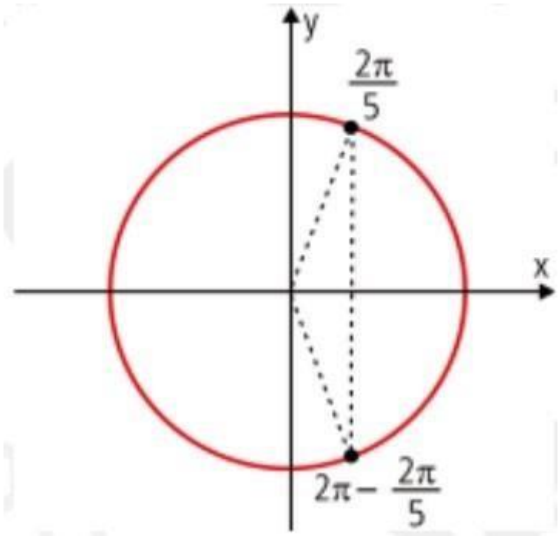
2. Resolva a equação cos x.tg x - cos x=0 no intervalo $[0,2\pi]$

Solução:

cos x.tg x - cos x=0 ⇒ cos x(tg x - 1)=0 ⇒ cos x=0 ou tg x=1 cos x=0 ⇒x=π/2 ou x=$3\pi/2$

Como a tg x não é determinada para x=π/2 e x=$3\pi/2$, essas respostas não são válidas. tg x = 1⇒ x=π/4 ou x=5π/4, pois $x \in [0,2\pi]$

3. Resolva a equação cos x = cos2π/5 cos x=cos2π/5 ⇒x=2π/5+2kπ ou x=(2π-2π/5)+2kπ=8π/5+2kπ



$$S = \{x \in R \mid x = 2\pi/5 + 2k\pi \; ou \; x = 8\pi/5 + 2k\pi\}$$

4. Resolva a equação sen x = cos x

Solução:

sen x = cos x⇒ sen x = sen(π/2-x) ⇒ x = π/2-x+2kπ⇒ 2x=π/2+2kπ/ ⇒ x=π/4+kπ

11. Exercícios para fixação

1. (UEL) O valor da expressão $\cos 2\pi/3 + \operatorname{sen} 3\pi/2 + tg\, 5\pi/4$ é:

a)$(\sqrt{2} - 3)/2$ b) $-1/2$ c) 1/2

d) 0 e) $\sqrt{3}/2$

2. (UFAL) O seno de um arco de medida 2340° é igual a:

PET Engenharia Biomédica

a) $\sqrt{3}/2$ b)1/2 c)0

d) -1 e)-1/2

3. (PUC-RJ) Assinale a alternativa correta.

a) $cos(2000°) < 0$

b) $sen(2000°) > 0$

c) $sen(2000°) = cos(2000°)$

d) $sen(2000°) = -sen(2000°)$

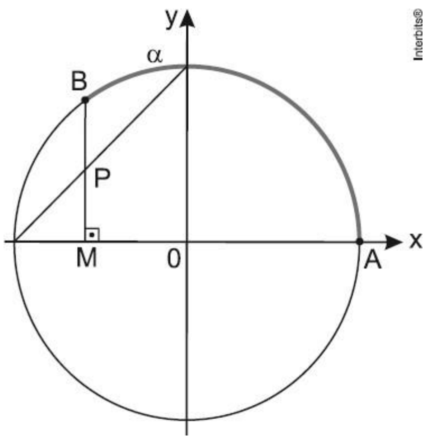
e) $sen(2000°) = -cos(2000°)$

4.(UEL) A expressão $cos[(3\pi/2) + x]$ é equivalente a:

a) -sen x b) -cos x c) sen x. cos x

d) cos x e) sen x

5. (FGV-SP) No círculo trigonométrico de raio unitário indicado na figura, o arco AB mede α. Assim PM é igual a:



a) -1 - tg α

b) 1- cos α

c) 1 + cos α

d) 1 + sen α

e) -1 + cotg α

6. (PUC-RJ) Se $cos\ 2\theta\theta$ = $7/25$ e $\theta\theta$ pertence ao primeiro quadrante, então $cos\ \theta\theta$ é igual a: a) 4/5

b) 3/5

c) $\sqrt{5}/3$

d) 5/7

e) $\sqrt{3}/2$

7. (PUC-RJ) Os ângulos (em graus) $\theta\theta$ entre 0° e 360° para os quais sen $\theta\theta$ = cos $\theta\theta$ são:

a) 45° e 90°

b) 45° e 225°

c) 180° e 360°

d) 45°, 90° e 180°

e) 90°, 180° e 270°

8. (PUC-RJ) Sabendo que $\pi < x < 3\pi/2$ e sen x= -⅓ é correto afirmar que sen 2x é:

a) -2/3 b) -1/6 c) $\sqrt{3}/8$ d)1/27 e)$4\sqrt{2}/9$

9. (IFCE) O valor de cos(105°) é

a) $-\sqrt{3}/2$ b)$(\sqrt{2}+\sqrt{6})/4$ c)$(\sqrt{2}-\sqrt{6})/2$

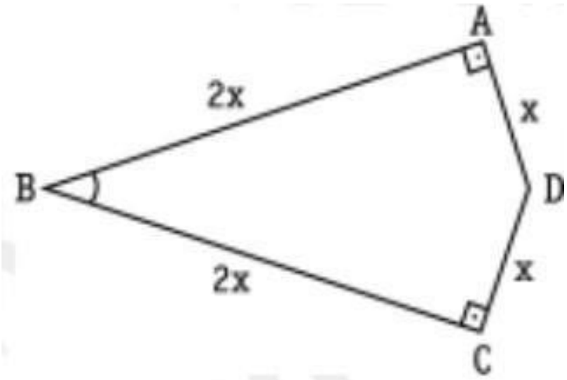
d)$(\sqrt{2}+\sqrt{6})/2$ e)$(\sqrt{2}-\sqrt{6})/4$

10. (UFES) Se x = 105°, então sen x é:

a) $(6\sqrt{2} - 2)/8$ b) $(6\sqrt{3} - 7)/4$ c) $(7\sqrt{3} - 5)/8$

d) $(3 + \sqrt{2})\sqrt{3}/8$ e) $(1 + \sqrt{3})\sqrt{2}/4$

11. (Fuvest) No quadrilátero ABCD onde os ângulos $\hat{A}$ e Ĉ são retos e os lados têm as medidas indicadas, o valor de sen B é:



a) $\sqrt{5}/5$ b) $2\sqrt{5}/5$ c) 4/5 d) 2/5 e) ½

12. A soma das raízes da equação sen^2x + $sen(-x)$ = 0, no intervalo [0, 2π] é:

a) $7\pi/2$ b) $9\pi/2$ c) $5\pi/2$ d) 3π e) $3\pi/2$

13. (FATEC) O conjunto solução da equação $2cos^2x + cos\ x - 1 = 0$, no universo U= [0, 2π], é:

a) $\{\pi/3, \pi, 5\pi/3\}$ b) $\{\pi/6, \pi, 5\pi/6\}$ c) $\{\pi/3, \pi/6, \pi\}$
d) $\{\pi/6, \pi/3, \pi, 2\pi/3, 5\pi/3\}$ e) $\{\pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3, 2\pi\}$

14. (UPF) Dentre as equações abaixo, assinale aquela que tem uma única solução em]$-\pi,\pi$].

a) tg α =1 b)sen α =0 c)cosα=-1 d) tgα=0 e)cosα=-2

15. (UFSJ) Sendo x um arco tal que $0 \leq x < 2\pi$ e $\sqrt{3}.\, tg(x) = 2 \,.\, sen\ x$, é correto afirmar que:

a) a soma das soluções dessa equação é igual a π

b) as extremidades de todos os arcos x que são solução dessa equação estão no terceiro quadrante.

c) nesse intervalo, a equação tem dois arcos distintos como soluções.

d) para qualquer solução dessa equação, tg x = sen x.

12. Respostas

1.e
2. c
3.a
4.e
5.c
6.a
7.b
8.e
9.e
10.e
11.c
12.a
13.a
14.c
15.c

Engenharia Biomédica

13. Referências

[1] MARQUES, A. F.; MAGNONI, M. DA G. M. **Cadernos dos Cursinhos Pré-universitários da UNESP**. 2016.

[2] JESUS, A.; SOARES, E.; et. al. **Aplicações da trigonometria.** UFBA. BR. Disponível em:
<fund198.ufba.br/trigo-pa/5-1aplic.pdf>. Acesso em: 01 de março de 2023.

[3] URL 1. VisionCor. **Como é feito o Eletrocardiograma? Para que serve?** Eletrocardiograma. Disponível em: <visioncor.com.br/site/como-e-feito-o-eletrocardiograma-para-que-serve>. Acesso em: 01 de março de 2023.

[4] ETAPA. **Apostila de Revisão Física, História, Matemática e Língua Portuguesa.** Etapa Educacional. .BR. 2018.

PET Engenharia Biomédica