PET Engenharia Biomédica

# Minicurso de Pré-Cálculo
# Apostila de apoio

Aula 5 – Limites e continuidade


Rodrigo Nascimento Buiati

PET – Programa de Educação Tutorial

Universidade Federal de Uberlândia


Uberlândia, 10 de março de 2023

# Sumário

# 1. Introdução

O minicurso de Pré-cálculo desenvolvido pelo Programa de Educação Tutorial (PET) Engenharia Biomédica surgiu como um apoio ao ingressante dos cursos de Engenharias, com o intuito de fornecer apoio ao mesmo. Levando em consideração a dificuldade de matérias que incluem a matemática básica e, na maioria das vezes, a dificuldade de lembrar de tudo aquilo que nos foi passado em anos da nossa vida estudantil, essa apostila vem com o objetivo e deixar registrado e facilitar o acesso a matérias consideradas necessárias para o decorrer da graduação.

# 2. O Limite de uma Função

Primeiramente, o estudo limite de funções tem como intuito investigar o comportamento de uma função quando se adota um conjunto de pontos em um intervalo próximo a um número escolhido. Com isso, o objetivo do estudo é verificar se o valor da função em questão ($f(x)$) se aproxima de algum número específico quando os valores da variável independente ($x$), se aproxima desse número escolhido. Dada essa premissa, temos a seguinte definição de limite:

. ***Definição***: Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número $a$. (Isso significa que $f$ é definido em algum intervalo aberto que contenha $a$, exceto possivelmente no próprio $a$.) Então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

E dizemos "o limite de $f(x)$, quando $x$ tende a $a$, é igual a L" se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando $x$ suficiente próximo de $a$ (por ambos os lados de $a$), mas não igual a $a$.

De forma mais simples, essa definição é equivalente a dizer que se o limite de $f(x)$ for igual a L quando $x$ tende a $a$, isso quer dizer que se escolhermos números cada vez mais próximos de $a$, o valor de $f(x)$ será cada vez mais próximo de L.

Outro detalhe importante é que ao procurar o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$, nunca se considera o caso em que $x = a$. Na verdade, a função $f(x)$ não precisa estar definida no ponto $x = a$. A única restrição é que a *f(x)* seja definida em pontos *próximos* de *a*.

A figura abaixo mostra os gráficos de três funções. Perceba que na parte (c), *f(a)* não está definida, e na parte (b), $f(a) \neq L$. Mas em todos os casos, não importando o que acontece em *a*, é verdade que o limite dessa função quando *x* tende a *a* é igual a *L*.

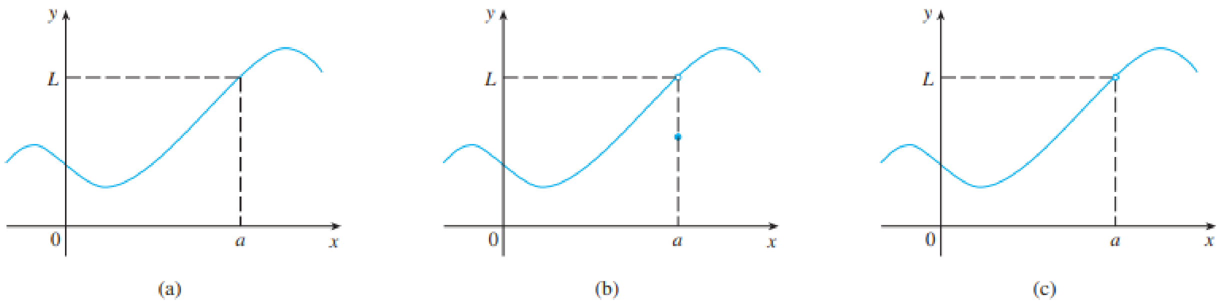



Figura 1. Limite da função quando *x* tende a *a*

.***Exemplo:*** A função de Heaviside, H, é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Figura 2. Função de Heaviside

Quando *t* tende a 0 pela esquerda, *H(t)* tende a 0. Quando *t* tende a 0 pela direita, *H(t)* tende a 1. Estes resultados podem ser facilmente visualizados através do gráfico da função H abaixo:

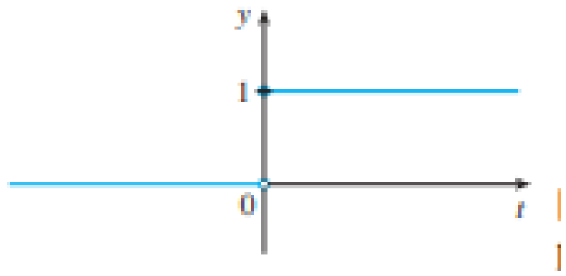



Figura 3. Gráfico da função de Heaviside

À medida que realizamos o cálculo de limites, é comum nos depararmos com resultados incorretos que recaem em casos conhecidos como indeterminações matemáticas. As principais indeterminações são as seguintes:

- $\infty - \infty$;
- $0 \times \infty$;
- $\frac{0}{0}$;
- $\frac{\infty}{\infty}$;
- $0^0$;
- $\infty^0$;
- $1^\infty$.

## 3. Limites Laterais

Como visto no exemplo da função de Heaviside, é possível analisar o comportamento de uma função assumindo pontos de *x* próximos de um valor conhecido *a*, porém, se aproximando apenas por valores maiores ou menores do que a.

Sendo assim, podemos escrever também uma definição para o limite quando é analisado de forma lateral da seguinte forma:

***.Definição***: Escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o **limite à esquerda de *f(x)* quando *x* tende a *a*** [ou o **limite de *f(x)* quando *x* tende a *a* pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de *f(x)* arbitrariamente próximos de L, para *x* suficientemente próximo de *a* e *x* menor que *a*.

De forma análoga ao apresentado acima, podemos definir o limite de uma função de forma a assumirmos valores de *x* próximos de um valor *a*, com *x* se aproximando de *a* por valores maiores que *a*.

Dessa forma:

.***Definição***: Escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

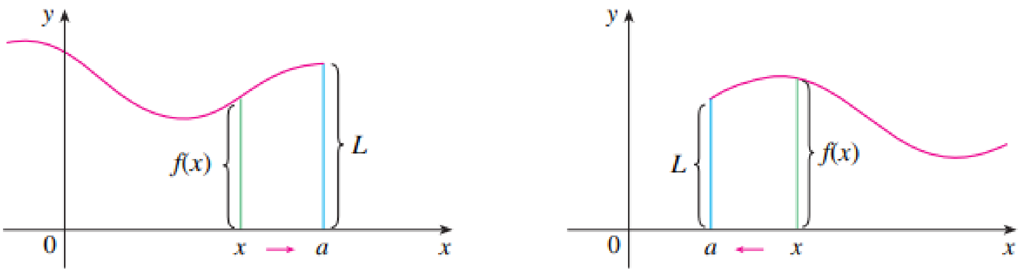
e dizemos que o **limite à direita de *f(x)* quando *x* tende a *a*** [ou o **limite de *f(x)* quando *x* tende a *a* pela direita**] é igual a L se pudermos tornar os valores de *f(x)* arbitrariamente próximos de L, para *x* suficientemente próximo de *a* e *x* maior que *a*.

A partir das definições de limites laterais, podemos chegar a uma definição geral para a existência do limite de uma função baseado em seu limite laterais. Desta forma, temos que:

$$\boxed{3} \quad \lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{se e somente se} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Figura 4. Definição de limite a partir de seus limites laterais

Na figura abaixo podemos ver de que forma os limites laterais se comportam e de que maneira a variável *x* se aproxima do valor de *a* em amos os casos:




(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Figura 5. Limites laterais pela esquerda e pela direita de uma função *f(x)*.

. Exemplo: Usando o gráfico da função *g(x)* abaixo, calcule os valores (caso existam) dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$

b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$

c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$

e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$

*f)* $\mathit{lim}_{x \to 5}\, g(x)$

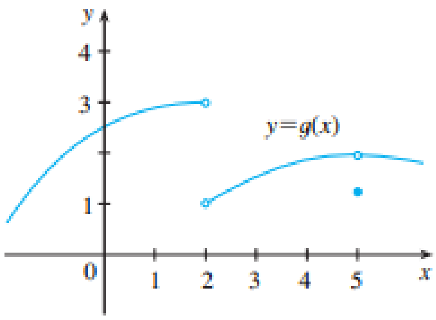



Figura 6. Gráfico da função g(x) do exemplo y

.***Solução***:

a) Podemos ver pelo gráfico que os valores da função *g(x)* se aproximam do número 3 à medida que o *x* tende à 2 pela esquerda. Logo:

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3$$

b) De forma análoga à letra a, podemos ver facilmente pelo gráfico que a função *g(x)* tende à 1 quando os valores de *x* se aproximam de 2 pela direita. Logo:

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

c) Uma vez que os limites laterais de *g(x)* pela direita e pela esquerda são diferentes entre si, podemos afirmar então que não existe.

d) O gráfico nos indica que para x tendendo à 5 pela esquerda o limite da função *g(x)* tende à 2. Portanto:

$$\lim_{x \to 5^-} g(x) = 2$$

e) Analogamente, pelo gráfico podemos inferir que a *g(x)* também tende à 2 quando *x* tende à 5 pela direita. Portanto:

$$\lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

f) Como os limites laterais de *g(x)* pela direita e pela esquerda são iguais, podemos concluir que:

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

Engenharia Biomédica

## 4. Limites Infinitos

Para começarmos a discutir limites infinitos, vejamos o seguinte exemplo:

.***Exemplo***: Encontre $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ se existir.

.***Solução*****:** à medida que $x$ tende a 0, $x^2$ também tende a 0, e $\frac{1}{x^2}$ fica muito grande, como pode ser visto na tabela abaixo.

| $x$ | $\frac{1}{x^2}$ |
|---|---|
| $\pm 1$ | 1 |
| $\pm 0{,}5$ | 4 |
| $\pm 0{,}2$ | 25 |
| $\pm 0{,}1$ | 100 |
| $\pm 0{,}05$ | 400 |
| $\pm 0{,}01$ | 10.000 |
| $\pm 0{,}001$ | 1.000.000 |

Figura 7. Atribuindo valores para a função $\frac{1}{x^2}$.

De fato, parece que a função *f(x)* pode se tornar arbitrariamente grande ao tornarmos os valores de $x$ suficientemente próximos de 0. Assim, os valores de *f(x)* não tendem a um número, e não existe $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$.

Para indicar o tipo de comportamento exibido neste exemplo usamos a notação

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Isso não significa que $\infty$ seja considerado um número. Tampouco significa que o limite de fato exista. Essa notação apenas expressa de uma forma simples a não existência de limite: $\frac{1}{x^2}$ se torna tão grande quanto quisermos, à medida que tomamos $x$ suficientemente perto de 0.

Com isso chegamos a outra importante e fundamental definição no estudo de limites de função:

.***Definição***: Seja *f(x)* uma função definida em ambos os lados de *a*, exceto possivelmente no próprio *a*. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de *f(x)* ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tornando *x* suficientemente próximo de *a*, mas não igual a *a*.

De forma análoga, este raciocínio pode ser expandido para um outro tipo de limite, onde as funções se tornam grandes em valor absoluto, porém negativo, quando *x* tende a *a*.

Assim, temos a seguinte definição:

.***Definição***: Seja *f(x)* definida em ambos os lados de *a*, exceto possivelmente no próprio *a*. Então:

$\lim x \to a f(x) = -\infty$

significa que os valores de *f(x)* podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, ao tornarmos *x* suficientemente próximo de *a*, mas não igual a *a*.

.Exemplo: Encontre $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ e $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3}$ .

.Solução: Se *x* está tendendo a 3, isso implica que o denominador *x*-3 está ficando cada vez mais próximo de 0. Contudo, se *x* tende a 3 pela direita, ou seja, *x* tende a 3 por valores maiores do que 3, então o denominador *x*-3 tende a 0 por valores positivos pequenos. Com isso, o quociente $\frac{2x}{x-3}$ tende a valores grandes e positivos. Com isso, temos que:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

Analogamente, no caso onde *x* tende a 3 pela esquerda, ou seja, *x* tende a 3 por valores menores o que 3, então o denominador *x*-3 tende a 0 por valores negativos. Com isso, o quociente $\frac{2x}{x-3}$ tende a valores grandes e negativos. Com isso, temos que:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

## 5. Propriedades dos Limites

Com intuito de facilitar os cálculos de limites de funções dadas por expressões mais elaboradas, um conjunto de propriedades básicas dos limites podem ser usadas. Abaixo há uma lista de algumas propriedades básicas:

1) Limite da soma de duas funções:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\ +\ g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\ +\ \lim_{x\to a} g(x);$$

2) Limite da diferença de duas funções:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\ -\ g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\ -\ \lim_{x\to a} g(x)\ ;$$

3) Limite do produto de uma função por uma constante:

$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\ .\ [\lim_{x\to a} f(x)]\ ;$$

4) Limite do produto de duas funções:

$$\lim_{x\to a}[\ f(x)\ g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\ .\ \lim_{x\to a} g(x)\ ;$$

5) Limite do quociente de duas funções:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ se\ \lim_{x\to a} g(x)\ \neq\ 0\ ;$$

6) Limite de uma constante:

$$\lim_{x\to a} c\ =\ c\ ;$$

Também é possível escrever essas propriedades de forma enunciada, da seguinte forma:

1) O limite da soma de suas funções é a soma dos limites dessas funções;
2) O limite da diferença de duas funções é a diferença dos limites dessas funções;
3) O limite do produto de uma função por uma constante é o produto da constante pelo limite da função;
4) O limite do produto de duas funções é o produto dos limites das funções;
5) O limite do quociente de duas funções é o quociente dos limites das funções, desde que o limite do denominador não seja zero;
6) O limite de uma constante é a própria constante.

Estudando os exemplos de aplicação das propriedades básicas de limites, é possível construir uma nova propriedade que facilita o cálculo de limite de diversos tipos de funções.

Essa propriedade nos diz que em casos onde as funções são ditas contínuas no ponto *a*, para calcular o limite podemos substituir diretamente a variável *x* por *a* (a definição correta de funções contínuas será dada na seção 6).

Para facilitar o entendimento da propriedade no nível atual dos estudos, vamos utilizar essa propriedade apenas para funções polinomiais ou racionais. Desta forma, temos:

.***Definição***: Se a função *f(x)* for do tipo polinomial ou racional, e o ponto *a* estiver no domínio da função *f(x)*, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

.Exemplo: Usando as propriedades dos limites e os gráficos de *f* e *g* na figura abaixo, calcule os seguintes limites, se eles existirem.

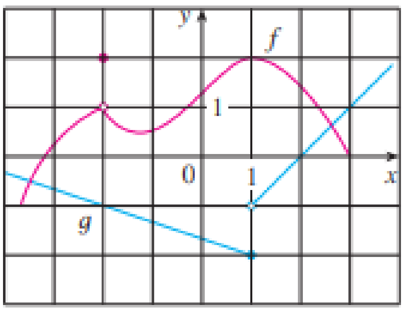



Figura 8. Gráficos das funções f(x) e g(x)

a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$;

b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$;

c) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

.Solução:

a) A partir dos gráficos dispostos acima, podemos ver que:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Portanto, temos que:

$$\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] = \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)]$$

$$= \lim_{x \to -2} f(x) + 5. \lim_{x \to -2} g(x) = 1 + 5(-1) = -4$$

b) Pelo gráfico podemos ver que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Mas $\lim_{x \to 1} g(x)$ não existe, já que os limites laterais são diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \text{ e } \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

Como o $\lim_{x \to 1} g(x)$ não existe, então podemos concluir que o $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ não existe;

c) Os gráficos mostram que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1{,}4 \text{ e } \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Pelo fato de que o limite do denominador é igual a 0, a propriedade do limite do quociente não pode ser utilizada. Por essa justificativa, o $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

Utilizando as propriedades de limite estudadas acima, é possível resolver grande parte dos exercícios que aparecem frequentemente. Contudo, existem limites que podem apresentar um nível de dificuldade mais alto em sua análise. Para isso, um forte teorema chamado Teorema do Confronto ou Teorema do Sanduíche pode ser utilizado para facilitar bastante o processo de resolução. Com isso, o Teorema do confronto diz:

.**Teorema do Confronto**: Assumindo as funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando $x$ está próximo do valor de $a$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \text{L}$$

Então conclui-se que

$$\lim_{x \to a} g(x) = \text{L}$$

.Exemplo: Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$.

.Solução: Observe primeiramente que a propriedade do produto dos limites não pode ser utilizada pois $\lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ não existe. Para contornar este problema, podemos utilizar o Teorema do Confronto para provar o limite acima.

Como se sabe que a função seno é uma função limitada entre os valores -1 e 1, podemos escrever

$$-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$$

Em seguida, vamos multiplicar cada lado das inequações por $x^2$, já que isso não vai alterá-la, pois $x^2$é positivo para qualquer valor de *x*. Com isso temos:

$$-x^2 \leq x^2 \sin(\frac{1}{x}) \leq x^2$$

Agora podemos avaliar o limite de cada lado da equação e chegamos ao seguinte resultado:

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \text{ e } \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

Com esse resultado o Teorema do Confronto pode ser facilmente utilizado e com ele chegamos à prova de que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

## 6. Continuidade

Como foi citado na seção anterior quando trabalhamos a propriedade da substituição, muitas vezes o limite de uma função pode ser encontrado simplesmente substituindo a variável *x* pelo valor do ponto a. A partir dessa ideia, temos que funções que apresentam essa característica no cálculo de limites para *x* tendendo a um ponto *a*, são chamadas de funções *contínuas* no ponto *a*. Com isso podemos elaborar uma definição precisa da continuidade de uma função da seguinte forma:

.Definição: Uma função *f(x)* é dita contínua em um ponto a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Vale a pena se atentar ao fato de que essa definição implica três condições necessárias para que possamos afirmar que uma função é contínua em um ponto a. Tais condições fundamentais são:

1) *f(a)* está definida na função *f(x)*, ou seja, o ponto a faz parte do domínio da função *f(x);*
2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;
3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

.Exemplo: Observe o gráfico abaixo da função *f(x)* e diga em quais pontos a função é descontínua e explique o porquê.

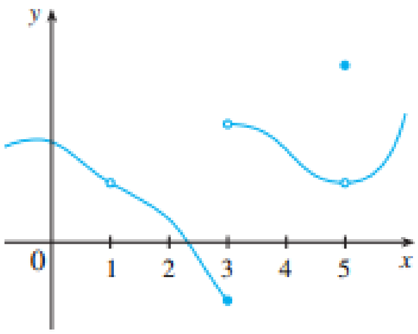



Figura 9. Gráfico da função f(x)

.Solução:

- No ponto onde *x = 1* a função não está definida e por isso, é descontínua neste ponto;
- No ponto *x = 3*, a função também é descontínua pois, embora a função esteja definida, os limites laterais nesse ponto são diferentes entre si. Por isso, $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existe, e por isso a função é descontínua;
- Por último, no ponto *x = 5*, a função está definida, o $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe (os limites laterais são iguais), mas a função é descontínua pois $\lim_{x \to 5} f(x) \neq$ *f(5).*

## 7. Exercícios de fixação

1) Calcule os limites a seguir:

*a.* $\lim_{x \to 5} (5(2x^2 - 3x + 4))$

.Solução:

$\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x \to 5} (2x^2)$ - $\lim_{x \to 5} (3x)$ + $\lim_{x \to 5} (4)$ =

= $2\lim_{x \to 5} (x^2)$ - $3\lim_{x \to 5} (x)$ + $\lim_{x \to 5} (4)$ =

= $2(5)^2 - 3(5) + 4$ =

$= 39$

$b.$ $\lim_{x \to -2} (\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x})$

.Solução:

$$= \frac{\lim_{x \to -2} (x^3) + 2 \lim_{x \to -2} (x^2) - \lim_{x \to -2} (1)}{\lim_{x \to -2} (5) - 3 \lim_{x \to 5} (x)} =$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)}$$

$$= \frac{-1}{11}$$

2) Encontre $\lim_{x \to 1} (\frac{x^2 - 1}{x - 1})$.

. Solução:

Primeiramente, não podemos substituir diretamente o *x* por 1, pois a função não está definida neste ponto. Portanto, alguma manipulação matemática deve ser feita para contornar esse problema.

Se fatorarmos o numerador da função com uma diferença de quadrados, temos:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

Com essa fatoração, o numerador e o denominador apresentam o termo $x$ - 1 em comum e este pode ser simplificado. Desta forma, o limite segue:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}(x+1) = 1 + 1 = 2$$

3) Calcule $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(3+x)^2-9}{x}\right)$.

.Solução:

Como no exercício anterior, não podemos substituir diretamente o $x$ por 0 pois a função não está definida neste ponto. Para contornar o problema, podemos desenvolver o produto notável do numerador da seguinte forma:

$$\frac{(3+x)^2-9}{x} = \frac{(9+6x+x^2)-9}{x} = \frac{6x+x^2}{x} = 6+x$$

Assim, podemos reescrever o limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(3+x)^2-9}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(6+x) = 6+0 = 6$$

4) Calcule $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

.Solução:

Não podemos substituir $t$ por 0 imediatamente pois isso resultaria em 0 no denominador, o que não é permitido. Para resolver o problema, podemos racionalizar o numerador da seguinte forma:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(t^2+9)-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

5) Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{5x + 4} - 3}{x - 1}$ .

.Solução:

Assim como foi feito no exercício 4, para resolver esse limite devemos primeiro manipular a função racionalizando o numerador. Sendo assim, temos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{5x + 4} - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{5x + 4} - 3}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{5x + 4} + 3}{\sqrt{5x + 4} + 3}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{5x + 4 - 9}{(x - 1)(\sqrt{5x + 4} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{5x - 5}{(x - 1)(\sqrt{5x + 4} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{5(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{5x + 4} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{5}{(\sqrt{5x + 4} + 3)} = \frac{5}{\sqrt{5(1) + 4} + 3} = \frac{5}{\sqrt{9} + 3} = \frac{5}{6}$$

6) Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$ .

.Solução:

Neste tipo de limite onde temos uma função racional e a variável $x$ tende ao infinito, ou seja, $x$ tende a valores positivos muito altos, podemos perceber que tanto o numerador quanto o denominador também crescem, logo, não fica evidente o que ocorre com a razão entre eles. Para contornar essa indeterminação, precisaremos manipular a função de forma algébrica.

Para este tipo de limite, a estratégia mais recorrente é dividirmos o numerador e o denominador pela maior potência de $x$ presente no denominador. No caso desse exercício, a maior potência de $x$ no denominador é o $x^2$. Dito isso, o limite pode ser manipulado da seguinte forma:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\frac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}{\lim_{x\to\infty}(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2})} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}(3) - \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}) - 2\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x^2})}{\lim_{x\to\infty}(5) + 4\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}) + \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x^2})} = \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}$$

7) Calcule $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$ .

.Solução:

Neste caso, quando a variável *x* tende ao infinito, isso faz com que tanto o termo $\sqrt{x^2 + 1}$ quando o termo *x* também tendem ao infinito no limite, fica difícil avaliar a diferença entre esses dois termos. Portanto, devemos reescrever a expressão de uma forma que facilite a operação.

Uma boa estratégia é multiplicar o numerador e denominador da função pelo conjugado radical da seguinte forma:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

8) Calcule $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ sin(x^2)$.

.Solução:

Pelas técnicas e propriedades utilizadas nos exercícios anteriores, esse limite se mostra nada trivial de ser resolvido. Porém, se utilizarmos o Teorema do Confronto, ele pode ser resolvido com grande facilidade. Dito isso, temos que:

$$-1 \leq sen(x^2) \leq 1$$

Sabemos que o seno, independente do seu argumento, é uma função limitada entre os valores de -1 e 1. Em seguida, podemos multiplicar os lados da inequação pelo termo $\sqrt{x}$, pois sabemos que ele apresenta apenas valores positivos. Com isso, temos:

$$-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\, sen(x^2) \leq \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to 0} -\sqrt{x} \leq \lim_{x \to 0} \sqrt{x}\, sen(x^2) \leq \lim_{x \to 0} \sqrt{x}$$

$$0 \leq \lim_{x \to 0} \sqrt{x}\, sen(x^2) \leq 0$$

A partir dessa inequação, podemos usar o Teorema do Confronto para concluir que $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}\ sin(x^2) = 0$.

9) Verifique se a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & se\ x \neq 2 \\ 1 & se\ x = 2 \end{cases}$ é contínua em $x = 2$.

.Solução:

O primeiro critério de continuidade que deve ser analisado é se a função está definida no ponto $x = 2$, e ela de fato está, pois $f(2) = 1$.

O segundo passo é verificar se $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe. Com isso, temos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x + 1 = 2 + 1 = 3$$

Por fim, para determinarmos se a função é de fato contínua, basta verificar se o valor da função no ponto $x = 2$ é igual ao valor do limite encontrado. Como $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$, então a função é descontínua em $x = 2$.

10) Mostre que a função $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ é contínua no intervalo [ -1, 1].

.Solução:

Com um número a definido no intervalo [ -1, 1], podemos usar as Propriedades de Limites para verificar a continuidade. Desta forma, temos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(1 - \sqrt{1 - x^2}) =$$

$$= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} =$$

$$= 1 - \sqrt{1 - a^2} = f(a)$$

Com isso, fica provado que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ e portanto, a função é contínua no intervalo [ -1, 1].

## 8. Referências


STEWART, James. Cálculo - Vol. 01. Editora: Cengage Learning. 7ª edição. São Paulo, 2014.